Tentamen Computerondersteund Probleemoplossen

03 april 2012, 9.00-12.00 uur.

Dit tentamen bestaat uit vijf opgaven waarvoor in totaal negen punten te behalen zijn. De detailnormering staat onderaan het tentamen. Totaal: 9 +1 (gratis) = 10. Schrijf op elk in te leveren blad je naam en studentnummer, en op het eerste blad het aantal ingeleverde bladen. Het gebruik van een (grafische) rekenmachine is toegestaan. Alle antwoorden dienen te worden gemotiveerd. Succes.

1. Beschouw de volgende kwadratische vergelijking

$$x^2 - 26x + 1 = 0. \tag{1}$$

   (a) Bereken de nulpunten $x^{(1)}$ en $x^{(2)}$ van de veelterm (1) met de klassieke *abc* formule voor de oplossing.

   (b) Voer dezelfde berekeningen uit op de rekenmachine gebruik makend van 5 significante cijfers (een mantisse van lengte 5). Is het resultaat accuraat of inaccuraat ? Licht uw antwoord toe.

   (c) Leg uit hoe je een nauwkeuriger resultaat kan verkrijgen als een van de benaderde nulpunten niet nauwkeurig is.

2. Beschouw het volgende stelsel lineaire vergelijkingen

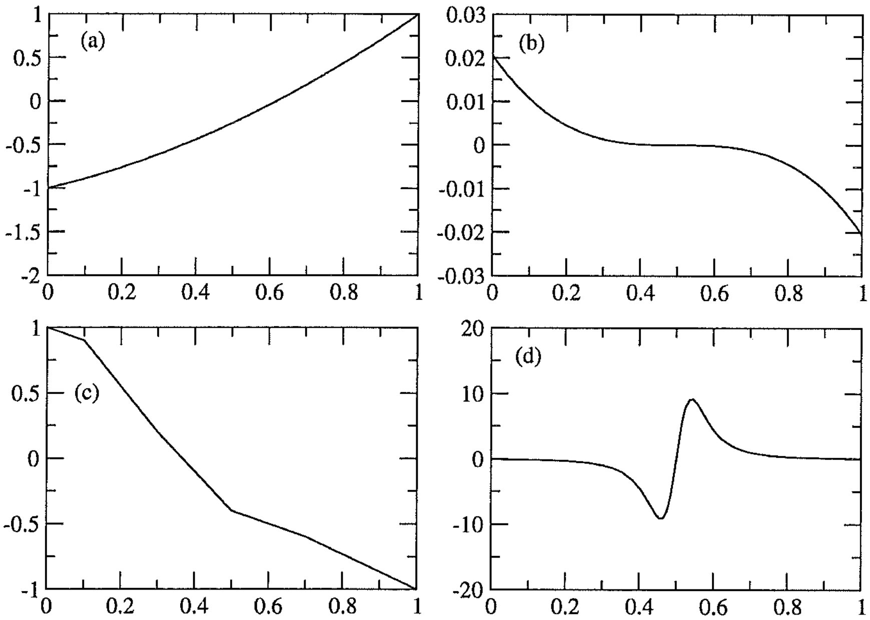
$$\begin{aligned} -10^{-4}x + y &= 1, \\ x + y &= 2. \end{aligned} \tag{2}$$

   (a) Bereken de exacte oplossing van het lineair stelsel (2).

   (b) Bereken de oplossing m.b.v. Gauss eliminatie zonder pivotering, en met 3 significante cijfers.

   (c) Bereken de oplossing m.b.v. Gauss eliminatie met partiële pivotering, en met 3 significante cijfers.

3. Hieronder staan vier verschillende functies geschetst.



(a) Geef voor elke functie aan welke numerieke methode het meest geschikt is om het nulpunt te bepalen, welke problemen je kan verwachten bij elke methode en of er voorwaardes zijn met betrekking tot initiële condities.

(b) De functie (a) is gegeven door $f(x) = x^2 + x - 1$ waarvan het nulpunt gerelateerd is aan het gouden getal. Hoeveel iteraties met de bisectie methode zijn er nodig om een benaderingsfout kleiner dan 10^{-3} te krijgen als begonnen wordt met het interval $[0, 1]$?

(c) Neem voor functie (a) de initiële conditie $x_0 = 0.5$ en bereken x_2 volgens de Newton-Raphson methode.

(d) De functie (b) is gegeven door $f(x) = \sin(x - 0.5) - x + 0.5$. Dit is een m-voudig nulpunt. Bepaal m.

4. Voor een parachutesprong geldt de differentiaalvergelijking $\frac{dv}{dt} = -g + C\frac{\rho A v^2}{m}$, waar de eerste term de valversnelling van de zwaartekracht is (9.82 m/s^2) en de tweede term de kracht van de luchtweerstand (ρ=1.271 kg/m^3). Voor een klassiek koepelvormige parachute is de constante $C = 0.4$. Het areal, A, is 25 m^2 en het gewicht van de parachutist 80 kg.

(a) Schrijf de uitdrukking voor de voorwaartse Euler methode voor deze differentiaalvergelijking op.

(b) Schrijf de uitdrukking voor de achterwaartse Euler methode voor deze differentiaal vergelijking op.

(c) Geef voor de twee methodes boven aan of ze impliciet of expliciet zijn.

(d) Wat is de asymptotische daalsnelheid? En hoe kan je deze kennis gebruiken bij het numeriek oplossen van het probleem?

5. Legendre polynomen zijn speciale polynomen die gebruikt worden om wiskundige functies te benaderen. De eerste Legendre polynomen zijn:

$$\begin{aligned} P_0 &= 1 \\ P_1 &= x \\ P_2 &= (3x^2 - 1)/2 \\ P_3 &= (5x^3 - 3x)/2 \\ P_4 &= (35x^4 - 30x^2 + 3)/8 \end{aligned}$$

De Legendre polynomen kunnen met de volgende recursie berekend worden:

$$\begin{aligned} P_0 =& 1, \\ P_1 =& x, \\ P_k =& ((2k-1)xP_{k-1} - (k-1)P_{k-2})/k \end{aligned}$$

(a) Matlab ondersteunt recursieve functies. Schrijf een recursieve Matlab functie die de coëfficiënten van de k-de Legendre polynoom P_k berekent, en die deze opslaat in de vectoren van de coëfficiënten c. De Matlab functie moet als volgt worden gedefinieerd:

```
function c = recursive_legendre ( k )
% c = recursive_legendre ( k )
% computes the coefficients of the k-th Legendre polynomial
%
% INPUT: k is the degree of the Legendre polynomial
% OUTPUT: c is the vector containing the coefficients of P_k
```

Opmerking: het gebruik van pseudocode is toegestaan, er wordt niet gecontroleerd op de syntax van de Matlab code.

(b) Recursieve algoritmen zijn vaak traag. In dit voorbeeld, hebben we 2^k functie-evaluaties nodig om c te berekenen voor een bepaalde k.

Schrijf een algoritme dat de coefficienten c van de Legendre polynomen P_k berekent, voor een bepaalde k, met behulp van een lus in plaats van recursie. De Matlab functie moet als volgt worden gedefinieerd:

```
function c = nonrecursive_legendre ( k )
% c = legendre ( k )
% computes the coefficients of the k-th Legendre polynomial
%
% INPUT: k is the degree of the Legendre polynomial
% OUTPUT: c is the vector containing the coefficients of P_k
```

Hint: bereken achtereenvolgens de coefficienten voor $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_k$ en sla deze op.

Opmerking: het gebruik van pseudocode is toegestaan, er wordt niet gecontroleerd op de syntax van de Matlab code.

Detailnormering:

1a	0.3	2a	0.4	3a	0.8	4a	0.4	5a	0.8
b	0.6	b	0.6	b	0.6	b	0.6	b	0.8
c	0.6	c	0.8	c	0.6	c	0.4		
				d	0.3	d	0.4		